

Devoir Surveillé n°5

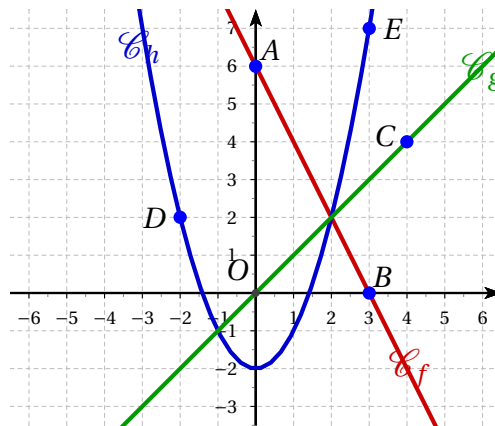
Troisième
Fonctions et équations
 Durée 1h - Coeff. 3
 Noté sur 22 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Validation des Savoirs Faire : Lectures graphiques

3 points

On considère dans le repère ci-dessous d'origine O , les points A, B, C, D, E . On suppose que les coordonnées de ces points sont des nombres entiers relatifs. On a tracé les droites (AB) et (OC) qui sont respectivement associées aux fonctions affines f et g , ainsi que la courbe d'une fonction h .



A compléter sur cette feuille

Le coefficient directeur de la fonction affine f associée à la droite (AB)	$m = -2$
L'ordonnée à l'origine de la fonction affine f associée à la droite (AB)	$p = 6$
L'expression de la fonction affine f associée à la droite (AB)	$f(x) = -2x + 6$
L'expression de la fonction affine g associée à la droite (OC)	$g(x) = x$
L'image de (-2) par la fonction h est	$h(-2) = 2$
Les antécédents de 7 par la fonction h sont	-3 et 3

Exercice 2.**7.5 points**

On appelle f la fonction définie par : $f(x) = (x-1)(2x-5)$.

1. Développer et réduire $f(x)$.

$$f(x) = (x-1)(2x-5)$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 2x + 5$$

$$f(x) = \underline{2x^2 - 7x + 5}$$

2. On a utilisé un tableur pour calculer les images de différentes valeurs par cette fonction f :**2. a.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$f(x)$	5	0	-1	2	9	20	35	54	77
3										

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1 :** $f(2) = 3$.

D'après le tableau, l'image de 2 par f est (-1) donc l'affirmation 1 est fausse.

- **Affirmation 2 :** L'image de 11 par la fonction f est 170.

$$f(11) = (11-1)(2 \times 11 - 5) = 10 \times 17 = \underline{170}$$

L'image de 11 par f est (170) donc l'affirmation 2 est vraie.

- **Affirmation 3 :** La fonction f est affine.

- On a montré que $f(x) = 2x^2 - 7x + 5$ qui n'est pas de la forme $(mx + p)$ donc f n'est pas affine.

- On pouvait aussi vérifier que la propriété de proportionnalité des accroissements n'était pas vérifiée. On a facilement :

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = -3 \text{ et } \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -1 \neq -3$$

- La fonction f n'est pas une fonction affine. L'affirmation 3 est fausse.

3. Une formule a été saisie dans la cellule B2 puis recopiée ensuite vers la droite. Quelle formule a-t-on saisie dans cette cellule B2 ?

$$\boxed{=(B1 - 1) * (2 * B1 - 5)} \text{ ou } \boxed{=2 * B1 * B1 - 7 * B1 + 5}$$

4. Quels sont les deux nombres x pour lesquels $(x-1)(2x-5) = 0$?

L'équation $(x-1)(2x-5) = 0$ est une équation produit nul. Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul soit :

$$(x-1)(2x-5) = 0 \iff (x-1 = 0) \text{ ou } (2x-5 = 0)$$

$$\iff x = 1 \text{ ou } x = \frac{5}{2}$$

Les deux nombres qui annulent $f(x)$ sont 1 et $\frac{5}{2}$.

5. Quels sont les antécédents de 5 par la fonction f ?

Les antécédents de 5 par f sont les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 5$ soit en utilisant la forme développée :

$$\begin{aligned} f(x) = 5 &\Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 5 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(2x - 7) = 0 \quad (\text{on retrouve une équation produit nul}) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Les antécédents de 5 par la fonction f sont 0 et $\frac{7}{2}$.

Exercice 3. Intersection**5.5 points****1. Déterminer la fonction affine h**

- On a : $\begin{cases} h(2) = 0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$ ou la droite passe par : $\begin{cases} A(2; 0) \\ B(4; -1) \end{cases}$.

h est une fonction affine d'où pour tout réel x , $h(x) = mx + p$.

- Calcul de m .

h est une fonction affine d'où pour tout réel x , $h(x) = mx + p$ avec

$$m = \frac{f(2) - f(4)}{2 - 4} \quad \text{Soit} \quad m = \frac{0 - (-1)}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$h(x) = -\frac{1}{2}x + p$$

- Calcul de p .

Or $h(2) = 0$ (ou $A(2; 0)$ est un point de la droite), d'où

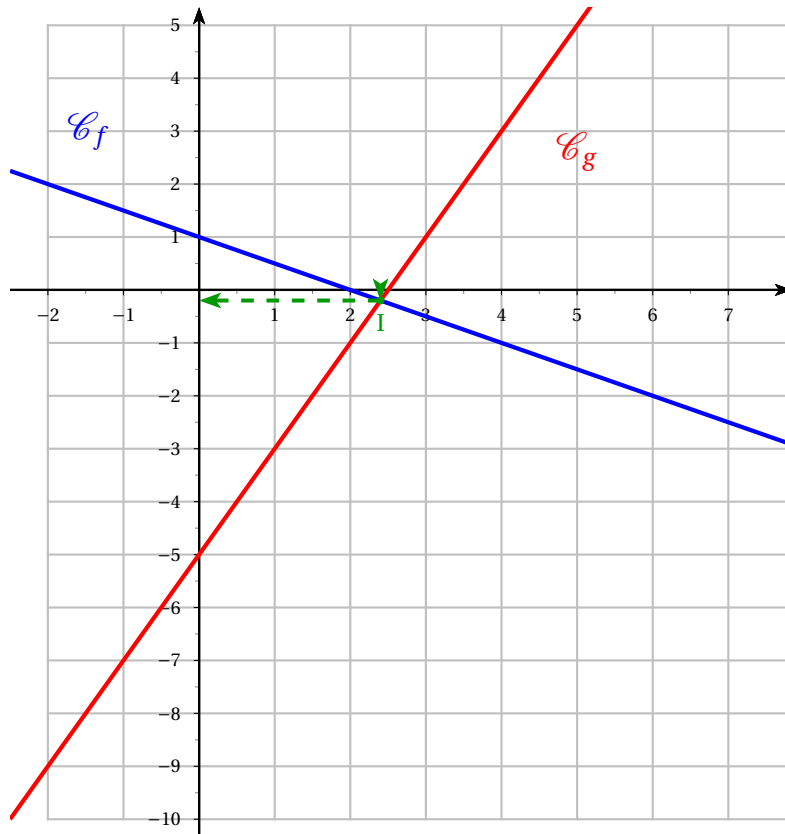
$$\begin{aligned} h(2) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times 2 + p = 0 \\ &\Leftrightarrow -1 + p = 0 \\ &\Leftrightarrow p = 1 \end{aligned}$$

- Conclusion : h est la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.

2. Représenter dans le repère ci-dessous les courbes représentatives des deux fonctions f et g définies par $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ et $g(x) = 2x - 5$. On admet que ces fonctions correspondent aux expressions obtenues lors de la question (??).

x	2	4
$f(x)$	0	-1

x	0	2
$g(x)$	-5	-1



3. Déterminer graphiquement le point d'intersection.

Graphiquement, les courbes se croisent au point I dont les coordonnées sont approximativement $I(2,5 ; -0,2)$. Donc il semble que pour $x = 2,2$, les deux programmes donnent le même calcul.

4. Déterminer par le calcul le point d'intersection.

$$\begin{aligned}
 f(x) = g(x) &\iff 1 - \frac{x}{2} = 2x - 5 \\
 &\iff 1 = 2x - 5 + \frac{x}{2} \\
 &\iff 6 = 2,5x \\
 &\iff \frac{6}{2,5} = x \\
 f(x) = g(x) &\iff \underline{x = 2,4}
 \end{aligned}$$

On calcule alors l'image par f ou par g pour avoir l'ordonnée du point d'intersection :

$$g(2,4) = 2 \times 2,4 - 5 = -0,2$$

Donc le point d'intersection est : $I(2,4 ; -0,2)$.

Exercice 4. Programme de calcul

5 points

1.

1. a. Julie a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5. Vérifier que ce qui est dit à la fin est : « J’obtiens finalement 20 ».

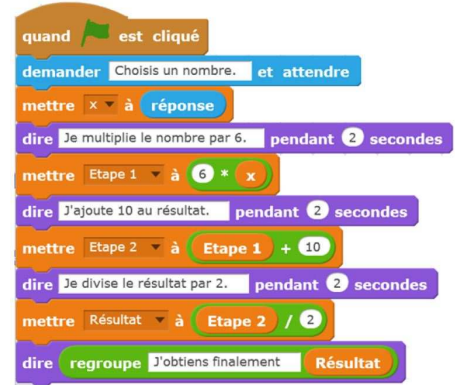
Pour $x = 5$:

- étape 1 : $6 \times 5 = 30$
- étape 2 : $30 + 10 = 40$
- résultat : $40 \div 2 = 20$
- dire « J’obtiens finalement 20 ».

1. b. Que dit le programme en choisissant au départ 7 ?

Pour $x = 7$:

- étape 1 : $6 \times 7 = 42$
- étape 2 : $42 + 10 = 52$
- résultat : $52 \div 2 = 26$
- dire « J’obtiens finalement 26 ».



2. Julie fait fonctionner le programme, et ce qui est dit est : « J’obtiens finalement 8 ». Quel nombre a-t-elle choisi ?

Pour retrouver le nombre du départ on peut « remonter » l’algorithme, d’où

- dire « J’obtiens finalement 8 ».
- résultat = $8 \implies 8 \times 2 = 16$
- étape 2 : $16 - 10 = 6$
- étape 1 : $6 \div 6 = 1$
- le nombre de départ est 1.

3. Si l’on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l’expression obtenue à la fin du programme, puis réduire cette expression autant que possible.

Pour x au départ :

- étape 1 : $6 \times x = 6x$
- étape 2 : $6x + 10$
- résultat : $(6x + 10) : 2 = \underline{3x + 5}$

4. Maxime utilise le programme de calcul ci-dessous :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 2
- Multiplier le résultat par 5

Peut-on choisir un nombre pour lequel le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie ?

- Le programme de Maxime donne, en choisissant x comme nombre de départ :
Pour x au départ :
– étape 1 : $x + 2$
– étape 2 : $5 \times (x + 2) = \underline{5x + 10}$
- On cherche donc x pour que les deux programmes donnent le même résultat. Cela revient à résoudre l’équation :

$$5x + 10 = 3x + 5 \iff 2x = -5$$

$$\iff x = -\frac{5}{2} = \underline{-2,5}$$

Le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie avec $-2,5$ au départ.

🎀 Fin du devoir 🎀